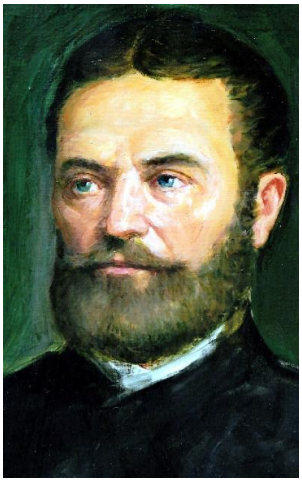
VARGA JÁNOS

BOLYAI JÁNOS a ’Teremtő’

„Ki mit írni méltat tanomról,
legyen az bár jó vagy rossz …
nagy köszönettel veszem.”

BOLYAI JÁNOS (1404/16)

Ennek a tanulmánynak legfőbb célja nem az, hogy új levéltári kutatási eredményeket tegyen közzé, hanem az, hogy a nem matematikus olvasóközönség számára a teljességre törekvés igénye nélkül, ugyanakkor részletesen csokorba gyűjtve bemutassa Bolyai János gazdag életművét, világra szóló matematikai eredményeit, megszabadítva ezzel az olvasót több tucat cikk, esetleg szakkönyv előkeresésétől, áttanulmányozásától és értelmezésétől, bizonyítva, hogy Bolyai János nemcsak világhírű geométer, „A tér abszolút igaz tudományának”*, az első nemeuklideszi geometriának a megalkotója volt, hanem egyetemes matematikai zseni, akit a matematika szinte minden ága érdekelt, és aki korának számos alapvető problémájával a tudományos világtól teljesen elzártan sikeresen foglalkozott, olykor évtizedekkel megelőzve más nagy nevekhez fűződő felfedezéseket, vagy körülbelül ugyanabban az időben hasonlót alkotva, akinek több meglátása, kérdésfelvetése, sejtése beigazolódott, illetve bizonyítást nyert. George Bruce Halsted, az austini (Texas) egyetem volt matematika professzora, Bolyai János egyetlen nyomtatásban megjelent munkájának, az Appendix-nek – melyet 2009-ben az UNESCO is bejegyzett a Memory of the World regiszterbe, mint a Világemlékezet részét képező művet – angolra fordítója úgy jellemezte őt, hogy: „… a halhatatlan János a világtörténelemben a lángésznek legtökéletesebb megtestesítője…”. Mi magyarok is valljuk, Szentágothai János szintén világhírű, Nobel-díjra is többször jelölt agykutató tudósunkkal, Tudományos Akadémiánk volt elnökével együtt, hogy: „A magyar nép géniusza a tudomány területén, legmagasabb fokon Bolyai Jánosban öltött testet.”*



Bolyai János (1802–1860)[1]

Teremteni annyi, mint „*a semmiből létrehozni valamit*” – írja a lexikon. Ebben az értelemben tehát Bolyai Jánost ’Teremtőnek’ kell tekintenünk. Tóth Imre világhírű matematikus, filozófus, matematika- és művelődéstörténész és Surányi László matematikus egybehangzóan azt állítják, hogy az Appendixbe sűrített életmű maga a teremtés aktusa volt [24]. A már idézett Halsted professzor szerint: *„a legrendkívülibb két tucat oldal a gondolkodás történetében”*. Vekerdi László ide kívánkozó gondolatával „szó szerint megteremtette az abszolút geometriát”, minden előzmény nélkül, saját szavaival is „a semmiből egy újj, más világot teremtettem”. Ez az új más világ egy új mértan, vagy pontosabban egy új geometria, ami alapjaiban különbözik az általunk középiskolában tanult, egy Eukleidész nevű görög matematikus által rendszerbe foglalt és róla elnevezett geometriától. Ezt az új geometriai rendszert – amely a maga nemében az *első* a világon – ma *Bolyai-geometriának* nevezzük. Ezt hozta létre, ha úgy tetszik teremtette az Erdélyben élő Bolyai János hadmérnök (vigyázat, képzettsége szerint nem matematikus!), akinek geometriája *abszolút*, illetve *hiperbolikus geometria* néven vált ismerté. (Ez valójában két geometria.)

Ezért az alkotásáért nyilvánosan soha, senkitől elismerést nem kapott, de hát egy teremtő ne is várjon semmilyen más magasabb rendű elismerést, mert ő a „legmagasabb”, és mindenfajta öndicséret gyalázat.

Mint minden nagy dolog a világon, valami kicsiből fejlődik ki, mint a növény a magból. Az új geometria „*magva*”, amiből aztán Bolyai geometriája is kifejlődött, egy rendkívül egyszerű, véges méretekben viszont nem könnyen belátható geometriai állítás (a matematikusok *posztulátum*nak nevezik), miszerint: Ha adott a síkban egy egyenes és rajta kívül egy pont, akkor a ponton át egy olyan egyenes fektethető, amely nem metszi az adott egyenest (vele párhuzamos). Ezen állítás – amely XI. axióma néven ismeretes – bizonyítására tett kísérletek mindegyike kudarcba fulladt, pedig minden valaminek számító matematikus megpróbálkozott vele. Ez lett a matematika Szent Grálja, a legkeményebb dió, amit közel 2000 évig senki sem tudott feltörni. Ma már tudjuk, hogy minden kísérlet eleve kudarcra volt ítélve, mert az állítás bizonyíthatatlan. Bolyai Farkas – Bolyai János apja – szintén évekig foglalkozott a problémával, de mint fiának írott egyik levelében írja: „irtóztató, óriási munkákat tettem, de életemnek minden világossága, minden öröme kialudt benne.” Egyszer azt találta mondani az akkor tizenhat éves fiának, hogy „aki ezt a problémát megoldja, az akkora gyémántot érdemel, mint a Föld.” Gauss volt időben az első matematikus a világon, aki szakmai alapossággal észrevette, hogy Euklidesz párhuzamosokra vonatkozó kijelentése – egy vele egyenértékű állítás felhasználása nélkül – nem bizonyítható. Ezt igazolják azok a levelek, melyeket Gauss 1820 körül Wilhelm Olbers, Christian Gerling, F. A, Taurinus, és más levelezőtársainak írt. Gausstól függetlenül, közel ugyanabban az időben ugyanerre a következtetésre jutott az Erdélyben élő Bolyai János is, aki ezt a gordiuszi csomót úgy vágta át, hogy egyszerűen elhagyta a XI. axiómát, így hozta létre a tér abszolút igaz tudományát, illetve azt az ellenkezőjével helyettesítette, megalkotva ezáltal a később hiperbolikusnak nevezett geometriát. Bolyai másik nagy gondolata, hogy ha már van többféle geometria, akkor melyik az, amelyik megvalósul? Amíg csak egy van, addig ez nem kérdés, de ha már több van, akkor már kérdés, hogy a Jó Isten ezek közül melyiket szerette? Ő erre is megadta a választ, megsejtette, hogy valójában az anyag határozza meg a geometriát. Ez a relativitáselmélet alapgondolata, amit később Einstein egy gyönyörű elméletben – közvetetten éppen Bolyai geometriai eredményére támaszkodva – kvantitative részletesen kidolgozott. Bolyainak ez a korai felismerése kézirataiba rejtve maradt hosszú évtizedeken keresztül, csakúgy, mint sok más matematikai eredménye, amelyeket később mások is felfedeztek, mivel ők maguk sem tudták, hogy valaki már megelőzte őket.

Kiket előzött meg Bolyai János, és miben?

• Kurt **Gödel** (1906–1978) világhírű matematikust: a róla elnevezett ún. *nemteljességi tétel* alapkoncepciójának több mint 108 évvel korábbi megsejtésével, felismerésével. Természetesen Bolyai nem magát a Gödel-tételt fedezte fel, hanem zsenialitásával csupán azt vette észre, hogy a XI. axióma nem bizonyítható. Ez viszont egy hatalmas lépés volt abban az időben! Ez a felismerése Gödel tételében teljes általánossággal kerül majd megfogalmazásra, miszerint minden olyan axiómarendszerben, amely ellentmondásmentes, és legalább a természetes számok axiómarendszerével azonos erősségű, nem teljes, azaz, van legalább egy olyan kérdés, amely a rendszerben megfogalmazható, de nem lehet véges lépésben bizonyítani, vagyis eldönthetetlen. Ezt az ún. nemteljességi tételt Gödel 1931-ben publikálta [1].

Ennek a tételnek a nem ismerete közrejátszott abban, hogy a 11. axiómát több mint 2000 évig senki sem tudta bebizonyítani, mivel az nem bizonyítható. Bolyai előtt mindenki bizonyítani akarta, már a görögök is, de nekik sem sikerült. Éppen ezért vette fel Eukleidész axiómának. Ha vesszük az euklideszi geometriát, és kivesszük belőle a párhuzamosok axiómáját, akkor az ún. „maradék” axiómarendszer alapján felépített geometriát *abszolút geometriának* nevezik. Ebből az abszolút geometriából a párhuzamosok axiómája nem bizonyítható. Maga Bolyai is először bizonyítani akarta, de 1823-ban rájött, hogy a XI. axióma sem nem bizonyítható, sem nem cáfolható. Ezt a tényt Bolyai Farkas a Gaussnak küldött Appendixhez mellékelt 1832. január 16-i levelében e szavakkal írja meg:

„Fiam … bebizonyította, miszerint lehetetlen a priori [a tapasztalat alapján – a szerző] eldönteni, hogy a XI. axióma igaz-e, vagy sem.” Bolyai János felfedezte, hogy egy geometriai axiómarendszerben megfogalmazható olyan állítás, amelynek igaz vagy hamis voltát eldönteni nem lehet. A *Gödel-tétel* is éppen ezt mondja, csak általánosan, minden axiómarendszerre vonatkozóan. Bolyai János csodálatos meglátása tehát Gödel univerzális tételével megerősítést nyert.

Milyen kár, hogy a geometrián kívüli területekre ezt nem gondolta végig, akkor most lehet, hogy őt tekinthetnénk a *nemteljességi tétel* teljes felfedezőjének is. E felfedezésének legfőbb bizonyítéka egyetlen nyomtatásban megjelent művének, az Appendixnek hosszabb címe is: *A tér abszolút igaz tudománya, a XI. Euklidész-féle axióma (tapasztalat útján soha el nem dönthető) igaz vagy nem igaz voltától független tárgyalásban: annak téves volta esetére a kör geometriai négyszögesítésével.*

(Bolyai János ezzel a munkájával egyszerre három világcsúcsot is felállított, mivel ez a leghosszabb című, de ugyanakkor a legtömörebb, és – most ismét Halsted professzort idézve – egyben: *„a legrendkívülibb két tucat oldal a gondolkodás történetében”*.)

Bolyai Gausstól függetlenül jutott arra a következtetésre, hogy a XI. axióma nem bizonyítható, sőt, az ellenkezője is feltehető. Ha ezt tesszük, azaz a párhuzamossági axióma Bolyai-féle változatát csatoljuk az abszolút geometriához, vagy másképpen mondva az euklideszi párhuzamossági axiómát a hiperbolikus axióma helyettesíti, az a Bolyai-geometria, vagy más néven *hiperbolikus geometria*. Ez azt mondja ki, hogy egy egyeneshez egy rajta kívül fekvő ponton át több párhuzamos is húzható. Ezt a geometriát nem Bolyai, hanem Felix Klein nevezte először hiperbolikusnak 1871-ben.

• Niels **Bohr** (1885–1962) világhírű, Nobel-díjas fizikus 1916-ban a fizikában fogalmazta meg az ún. *korrespondencia-elv*et. Eszerint a kvantummechanika törvényei nagy kvantumszámok esetében meg kell, hogy egyezzenek a klasszikus mechanika törvényeivel [2]. A korrespondencia-elv (az egymás mellé rendelés elve) szerint egy magasabb rendű rendszer/elmélet/tétel magába foglalja az alacsonyabb rendűt. Tudománytörténeti hűség kedvéért meg kell említeni, hogy több mint 90 évvel korábban Bolyai János is alkotott egy magasabb szintű geometriai rendszert – a hiperbolikus geometriát –, amely speciális esetként magába foglal egy alacsonyabb rendűt – az euklideszi geometriát. Tehát példát adott egyfajta geometriai „mellérendelésre”, bár ő ezt sohasem fogalmazta meg általános elvként. Ez az elv a matematika alacsonyabb szintjén is működik. Az alábbi táblázat néhány ilyen esetet tartalmaz.

Magasabb rendű rendszer/ tétel	Speciális esete	Speciális eset feltétele
Hiperbolikus geometria (Bolyainál ***S***-renszer)	Euklideszi geomeria (Bolyainál **Σ**-renszer)	$k \to \infty$
Kvantummechanika	klasszikus mechanika	nagy kvantumszámok
Középponti és kerületi szögek tétele	Thalész-tétel	középponti szög = 180°
Koszinusz tétel	Pitagorasz-tétel	a háromszög egyik szöge 90°-os
Ptolemaiosz-tétel	Pitagorasz-tétel	húrnégyszögben az átlók és a szemközti oldalak is egyenlők egymással
Körhöz húzott érintő és szelőszakaszok tétele	Pitagorasz-tétel	a szelő átmegy a kör középpontján (Dugonics András bizonyítása)

Bolyai geometriája valóban mintegy határesetet foglalja magába Euklidész geometriáját.

Ha a hiperbolikus geometriában $\mathbf{k} \to \infty$ (k paraméter tart a végtelenhez), akkor az euklideszi geometria törvényeit kapjuk. Ezt Bolyai már 1826-ban[2] kimutatta. Rájött tehát, hogy az ő új geometriája, mint magasabb rendű elmélet, speciális esetként magába foglalja az alacsonyabb rendű euklideszi geometriát. Ez valójában a korrespondencia-elv első felismerése a tudománytörténetben.

Nézzük erre egy konkrét példát a szerző levezetésével. Vezessük le a kör kerületének az euklideszi geometriában érvényes összefüggését a hiperbolikus geometria hasonló összefüggéséből. Az eredményt a $k \to \infty$ határérték kiszámításával kapjuk meg.

A kör kerülete a hiperbolikus geometriában (Bolyai jelölésével): $\mathbf{O_r} = \mathbf{2\pi \boldsymbol{k} \cdot cot\, u}$, $= \mathbf{2\pi \boldsymbol{k} \cdot\ sh \frac{r}{k}}$, ahol $\mathrm{sh}\, x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$

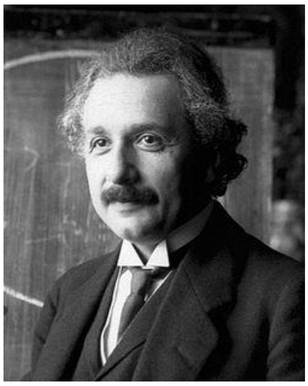
A kör kerülete (K) az euklideszi geometriában tehát

$$K = \lim_{k \to \infty} 2\pi k \cdot \mathrm{sh}\frac{r}{k} = 2\pi \cdot |\infty \bullet 0| = 2\pi \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{\mathrm{sh}\frac{r}{k}}{\frac{1}{k}} = \left|\frac{0}{0}\right| = \left| \frac{Bernoulli\text{–}L'Hospital}{\text{szabályt alkalmazva}} \right| =$$

$$2\pi \cdot \lim_{k\to\infty} \frac{\mathrm{ch}\frac{r}{k}}{(\frac{1}{k})'} \cdot \left(\frac{1}{k}\right)' \cdot r = 2\pi \cdot 1 \cdot r = 2\pi r = \underline{\underline{\mathbf{d\,\pi}}},$$

ami valóban a kör kerülete az euklideszi geometriában. (A mérnökök inkább a d·π alakot használják, mivel az átmérő közvetlenül mérhető, míg a sugár nem.)

• Bernhard **Riemann** (1826–1866) világhírű matematikust: a tér szerkezetét meghatározó fizikai tényező felismerésében. Riemann Gauss göttingai utóda, aki 1854-ben írt értekezésében kifejezi azon véleményét, hogy a tér szerkezetét fizikai tényezők határozzák meg, de nem tudta megmondani, hogy melyik az a fizikai tényező. Einstein ezt írta Riemannról: „tiszta elmélkedéssel jutott arra a felismerésre, hogy a geometria elválaszthatatlan a fizikától. Ezt az elvet 70 évvel később az általános relativitáselmélet valósította meg [4].” Bolyai túl azon, hogy ugyanezt Riemann előtt megsejtette és leírta, többet állított, mert kijelentette, hogy ez a fizikai tényező a *gravitáció*, azaz az általános tömegvonzás, a nehézkedés.



• Albert **Einstein** (1879–1955) Nobel-díjas fizikust – akit a Time magazin az évszázad emberének választott –, a relativitáselmélet alapgondolatának felfedezésében. Bolyai több mint 80 évvel Einstein előtt leírja azt a gondolatát, miszerint a tér szerkezetét a gravitáció határozza meg.

A Bolyai-hagyaték 491. lapján ez olvasható: „az nehézkedés törvénye is szoros összveköttetésben, foljtatásban tetszik (mutatkozik) az űr természetével, valójával (alkotásával), miljségével; gondolom az egész természet (világ) foljása” – vagy mai helyesírással: „*A nehézkedés törvénye is szoros összeköttetésben, folytatásban mutatkozik a tér természetével, valójával, alkotásával, milyenségével; gondolom az egész természet folyásával* [16, 353. o.].”

„Ez a meglátása végeredményben annak felismerését jelenti, hogy *a fizikai gravitációs erőtér és a geometriai tér között belső összefüggésnek kell lennie* [10, 133. o.].”

„Ez valójában a relativitáselmélet alapgondolata, a *fizika geometrizálásának tézise* [4].” A nemrég elhunyt Toró Tibor fizikaprofesszor szerint: „Bolyai Jánost joggal tarthatjuk számon a XX. századi fizika egyik legszebb és legalapvetőbb fizikai alapeszméje: a fizika geometrizálása gondolatának legelső megfogalmazójaként [17, 146. o.].” Bolyai ezt a fontos tézist életében nem publikálta. De még ennél is nagyobb szenzációt keltett, amikor kiderült, hogy egy 1835-ös keltezésű kézirataban a nemeuklideszi alapra helyezett mechanika kidolgozását szorgalmazta. Első lépésként egy új, nemnewtoni gravitációs törvényt adott, amit Stäckel publikált először az 1914-ben kiadott *Bolyai Farkas és Bolyai János geometriai vizsgálatai* című könyvében. Gábos Zoltán professzor Paul Stäckel könyvére alapozva azt írja, hogy Bolyai János ezzel kapcsolatos eredeti kéziratának nyoma veszett [14]. Oláh-Gál Róbert csíkszeredai Bolyai-kutató nemrégiben szerencsére rábukkant az elveszettnek hitt kézirati lapokra, de még ő is feltételezi, hogy esetleg még ettől hosszabb fizikai tárgyú Bolyai-féle eszmefuttatás is fellelhető lesz a kézirati anyagban [15].

Bolyai János erőtörvényével tehát fél évszázaddal előzte meg korát.

• Carl Friedrich **Gauss** (1777–1855) matematikust, a „matematika fejedelmét”: az első nemeuklideszi geometria felfedezésében és részletes kidolgozásában. „*… ezt a fiatal geométert, Bolyait, elsőrangú lángésznek tartom.*” – írta Gauss 1832. február 14-én barátjának, Christian Ludwig Gerling marburgi matematikusnak, miután elolvasta a Bolyai Farkas által neki küldött Appendixet. Gauss 30-35 éves vizsgálódásai során – melyből semmit nem tett közé –, ért el eredményeket, de rendszerét nem dolgozta ki teljes mélységében, csak tervezte. Így nem tekinthető a hiperbolikus geometria megalkotójának. Szénássy Barna matematikatörténész és Prékopa András akadémikus professzorok részletesen tanulmányozták Gauss ezzel kapcsolatos munkásságát, és megállapították, hogy ez valóban így van. A témában való tájékozottságát viszont egyértelműen bizonyítja az a szakszerű hozzászólása az Appendix-hez, amit barátjának, Bolyai Farkasnak 1832. március 6-án küldött levélben leírt. E levélben is dicsérő szavakkal illeti János teljesítményét: „*nagyon örömteli számomra, hogy éppen régi barátom fia az, aki ily sajátos módon megelőzött* [kiemelés tőlem – VJ]”. Ez a mondata egyértelműen eldönti a prioritást.

A Bolyai iratokban esetleg lehetnek még más olyan eredmények, amelyekkel János megelőzte Gausst, akit apjához írott egyik levelében „a földgömb és az évezred matematikusainak herkulese” jelzővel illet, akit példaképnek, de ugyanakkor túlszárnyalandó vetélytársnak is tekintett, és ugyanitt megjegyzi, hogy „sok egyebet is létesítettem, mit Gauss lehetetlennek declarált [9, 181. o.].”

• Ferdinand von **Lindemann** (1852–1939) német matematikust: a *kör négyszögesítés*[3] lehetetlenségének felismerésében. Ezt a gondolatát az Appendix utolsó, 43. paragrafusában a következő tömör formában fejezi ki: „*vagy érvényes Euklidész XI. axiómája, vagy pedig lehetséges a kör mértani kvadratúrája*[4] [négyszögesítése – a szerző]”. Tehát a kör négyszögesítésének lehetséges volta kizárja a 11. axiómát. Habár Bolyai János látta be az emberiség történetében talán legelőször, hogy a kör négyzetesítése az euklideszi geometriában lehetetlen – ezzel Lindemannt 50 évvel megelőzte –, a végső bizonyítását Lindemann adta meg. A matematikatörténetben azért tulajdonítják neki a felismerést is, mert 1882-ben ő igazolta, hogy a π transzcendens szám, azaz nem lehet megoldása algebrai egyenletnek.

A technika történetében gyakran megesik, hogy ha egy eszköz iránti igény jelentős mértékűvé válik, akkor szinte biztosak lehetünk benne, hogy az ezzel kapcsolatos találmány(ok) közel azonos időben különböző helyeken is megszülethetnek. Hasonló a helyzet a tudomány területén is. Ha egy téma/tétel több kutató közösség vagy egyén, intenzív érdeklődésének középpontjába kerül, akkor itt is várhatók párhuzamos felfedezések. Bolyai János esetén is szembesülünk ezzel a jelenséggel, amelyre apja e szavakkal hívta fel a figyelmét: „*az eszméknek mintegy megvan a maguk korszaka, amikor a különböző helyeken egy időben fedeztetnek fel, amint tavasszal az ibolyák mindenütt kikelnek, ahol csak süt a nap.*”

Az apa jóslata beteljesedett, hiszen Bolyai Jánoshoz hasonló geometriai gondolatokra jutott egy tőle távol – Kazanyban – élő matematikus is, illetve maga Bolyai is fedezett fel, bizonyított be olyan tételeket, melyeket tőle függetlenül mások is felfedeztek, illetve bebizonyítottak.

Kikkel volt Bolyai Jánosnak párhuzamos felfedezése? Milyen párhuzamos felfedezéseket tett?

Nyikolaj Ivanovics **Lobacsevszkij** (1792–1856) kazanyi matematikussal szinte időben párhuzamosan, tőle függetlenül megoldotta a párhuzamosok problémáját, azaz felfedezte a világ első nemeuklideszi geometriáját.

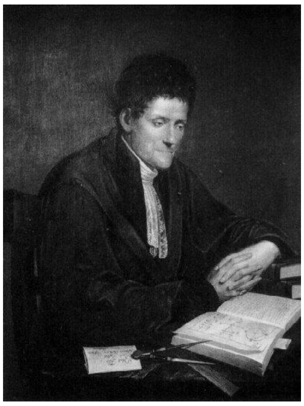
George Bruce Halsted, az austini (Texas) egyetem volt matematika professzora, aki Bolyai művét, az Appendixet 1891-ben lefordított angolra, összehasonlította Bolyai felfedezéseit *Lobacsevszkijével,* de a nemeuklideszi geometria megteremtőjeként Bolyait tiszteli: „*... a halhatatlan János a világtörténelemben a lángésznek legtökéletesebb megtestesítője...*" Művéről pedig azt írta, hogy az „*a legrendkívülibb két tucat oldal a gondolkodás történetében*"[5]. A másik tudós, aki sokat foglalkozott a Bolyaiakkal, *Paul Stäckel* német kutató volt. Ő is Bolyai Jánost ismerte el a nemeuklideszi geometria megteremtőjeként. „*Bolyai János abszolút geometriáját teljesen önállóan fedezte fel és dolgozta ki*" – írta Stäckel.

Lobacsevszkij a hiperbolikus geometria tételeit, míg Bolyai a két esetet együtt kezelve a kétféle geometria – euklideszi és hiperbolikus – közös részét, az *abszolút geometria* tételeit dolgozta ki.

Míg Lobacsevszkij (akinek cikke egy kazanyi egyetemi folyóiratban látott napvilágot 1829 és 1830 között) csak egy olyan geometria létezésének lehetőségét bizonyította, amelyben Euklidész V. posztulátuma hamis, a Bolyai által leírt abszolút geometriai vizsgálatok azonban teljesen függetlenek az előbb említett euklideszi elvtől, és a görbült tér különböző fajtáin is alkalmazhatóak. Ezzel az elméletével újraértelmezte a párhuzamosságot, és bemutatta a hiperbolikus sík különféle nevezetes alakzatait. A két geometriát együtt tárgyalta, és párhuzamot vont a gömbi geometriával is. Az ifjabb Bolyai felfedezését 1820 és 1824 között – nagyrészt a bécsi katonai akadémián töltött évek alatt – dolgozta ki, majd 1823 november 3-án Temesvárról már a következőket írta apjának: „A feltételem már áll, hogy mihelyt rendbe szedem, elkészítem, s mód lesz, a paralellákról egy munkát adok ki."

Apjának 1825 elején mutatta meg a már kidolgozott elméletet. Johann Wolter von Echwehrnek, bécsi akadémiai matematikatanárának 1826-ban Aradon adja át ennek egy kéziratos német nyelvű fogalmazványát, ami sajnos – eddigi tudásunk szerint – elveszett. Műve végül 1832-ben jelent meg először nyomtatásban Appendix néven, apja Tentamen[6] c. könyve függelékeként.

Az új geometriát a szakirodalom *Bolyai–Lobacsevszkij-féle geometriának* nevezi. Munkájuk korszakalkotó jelentőségét csak a XX. század elején ismerték fel, mert ez biztosított közvetett matematikai alapokat az általános relativitáselmélet kidolgozásához.


Paolo **Ruffini** (1765–1822)


Niels Henrik **Abel** (1802–1829)


Évariste **Galois** (1811–1832)

Ruffini olasz és **Abel** norvég matematikusokhoz hasonlóan megoldotta az algebra 300 éves problémáját, ő is felfedezte a róluk elnevezett híres tételt, amely szerint az ötöd vagy magasabb fokú algebrai egyenletekre nem lehet olyan gyökképletet adni, amelynek segítségével az együtthatókból ki lehetne számítani az egyenlet gyökeit, azaz ezek az egyenletek algebrai módszerekkel (vagyis a négy alapművelet, a hatványozás és a pozitív egész kitevőjű gyökvonás véges sokszor való alkalmazásával) általában nem oldhatók meg. A tételt – amely a teljes komplex számtestben érvényes – először P. Ruffini olasz matematikus találta meg 1799-ben, majd N. Abel norvég matematikus bizonyította be hibátlan gondolatmenettel 1826-ban [5]. Bolyai János is megoldotta az algebrában a Ruffini–Abel-tételt, amit, mint írja, két módon tudott bizonyítani. Az egyik a Ruffini hibás bizonyításának általa „illőleg megjobbított, s tökélyre vitt szép eredeti, elmés eszméje", valamint egy általa talált másik bizonyítással. Ez utóbbi bizonyítás sajnos nem található meg feljegyzései között, valószínűleg elveszett, vagy ott bujkál a hatalmas kézirattömegben, felfedezésre várva. Kijelentésének szavahihetőségét erősíti egyik gondolata – és ez reményt ad arra, hogy esetleg előkerül ez a bizonyítása is –, miszerint „*Az igazságot tanilag és erkölcsileg határtalanul szeretem*." Bolyai nem tudott arról, hogy Abel a tételre teljes bizonyítást közölt. Ezért elhatározta, hogy „Az Emberiség előtt kedves szolgálatot teendek: ha e bogok bogját … szerencsésen föl-oldandom. [9, 151. o.]" Erőfeszítéseinek eredményességéről így ír: „…szerencsésen *a dolog igaz erére találnom és célhoz is jutnom hála Istennek sikerült* is. [9, 149. o.]" Egyik helyen ezt írja: „Tan. [Tétel] *Négynél fölsőbb vagyis legalább öt-rangú (geber)* [ötödfokú algebrai] *általános egyenletet geberül* [algebrailag] *föloldani lehetetlen*". „1830-ban egy új csillag tűnt fel a tiszta matematika egén, nem sejtett ragyogással, hogy hamarosan kialudjon: Évariste *Galois*" – írja Felix Klein. Galois állította fel annak feltételeit, hogy egy négynél magasabb fokú egyenlet megoldható legyen. E feltételek megállapításához egészen új matematikai elméletet kellett teremtenie – a *csoportelméletet*. Kidolgozta annak feltételét is, amely mellet a p-edfokú egyenlet, ha p törzsszám, egyszerű egyenletekkel megoldható [18, 447. o.]. Bolyai nem ismerte Galois eredményeit sem. Mindenesetre Bolyai feljegyzéseiből világosan kitűnik, hogy kortársaitól függetlenül ő is eljutott a Ruffini–Abel-tételig és annak bizonyításáig, ami mai szemmel mérve is igen jelentős matematikai teljesítménynek tekinthető. Micsoda véletlen egybeesése a dátumoknak, hogy Bolyai ugyanabban az évben született, mint Abel, és szintén 1826-ban ért el kimagasló matematikai eredményt. Sorsuk még abban is közös, hogy bár annak ellenére, hogy hihetetlen eredményeket értek el, nagyszerű felfedezéseket tettek, életükben igen kevéssé ismerték őket. A „matematika hercege" (ez lenne a helyes fordítása a *Princeps mathematicorum*-nak, mert a „princeps" 'herceget' jelent és nem fejedelmet! – a szerző) Gauss, nyíltan egyiküket sem ismerte el, sőt, eredményüket irigyelve inkább elhallgatta őket. Nagyszerű eredményeikről még egy sort sem írt az általa szerkesztett matematikai folyóiratba. Mindketten egész életükben szegénységben éltek és szegényen haltak meg. És ez már valóban csak játék a gondolattal, hogy ha Bolyai János ma élne, akkor biztosan Abel-díjas lenne.

Carl Friedrich **Gausstól** függetlenül és körülbelül vele egy időben dolgozta ki a *komplex egészek aritmetikáját*. Bolyai János jól ismerte Gauss Disquisitiones arithmeticae című számelméleti munkáját, de a komplex számokkal foglalkozó igen jelentős dolgozatai közül sajnos már jóval kevesebbet. Így János több olyan eredményre jutott, melyeket Gausstól függetlenül ő is felfedezett. Sőt még olyan meglátásai is voltak, amelyek Gaussnál nem találhatók meg. Az adatok tanúbizonysága szerint Bolyai arra törekedett, hogy a számelmélet bizonyos fogalmait és tételeit a komplex számokra is kiterjessze. Majd vizsgálódásai során a számelmélet alaptételének megfelelőjeként a komplexek körében is eljut a következő tételhez: minden a + bi alakú [komplex egész] szám (a tényezők sorrendjétől eltekintve) egyértelműen felbontható véges számú prímek szorzatára. Ha annak idején Bolyai ilyen irányú eredményeiről, ahogyan tervezte, egy kis terjedelmű munkát tudott volna kiadni, akkor ma a tudománytörténet világszerte minden bizonnyal úgy is számon tartaná őt, mint a komplex számok elméletének egyik legjelentősebb megalapozóját.

Sajnos Gaussal ellentétben ő nem készített összefüggő dolgozatot próbálkozásairól. Bolyai elmélete nem olyan kimerítő és részletes, mint Gaussé, az alkalmazásokban viszont túlszárnyalta Gausst. A komplex egészekre vonatkozó megállapításait nagyszerűen felhasználta különböző számelméleti tételek – például Fermat karácsonyi tételének – bebizonyításánál.

William Rowan **Hamilton** (1805–1865) ír matematikushoz hasonlóan a *komplex számokat rendezett valós számkettősként fogja fel*, igaz, még nem éppen olyan kiforrott formában, mint kortársa.

Bolyai korát megelőző gondolatokat vallott a komplex számok elméletében is. 1837 őszén a lipcsei Jablonowski Társasághoz benyújtott, Responsio nevű, mindössze nyolc oldal terjedelmű, 11 paragrafusból álló pályaműve sok új és értékes gondolatot tartalmaz. Eredeti meglátást rejt a 8. §, melyben az apjának a valós számok logaritmusára vonatkozó újszerű felfogását a komplex számok esetére általánosítja. Mivel János nem ismerte A. Cauchy komplex függvénytani vizsgálatait, ezért ez az eredménye eredetinek tekinthető. A matematikatörténészek a Responsio legértékesebb részének a 9. §-t tartják. Ebben szerzője az Appendixre való egyszerű hivatkozással közli az abszolút trigonometria háromszögre vonatkozó két fontos képletét, megemlíti a *hiperszféra* fogalmát, továbbá, hogy ezen a felületen érvényes hiperbolikus geometria trigonometriai képletei formailag megegyeznek a *k/i* sugarú gömb trigonometriájával. Ezekkel a vázlatosan közölt észrevételekkel azt igyekezett igazolni, hogy az *i* képzetes egységnek milyen óriási jelentősége van az általa megalkotott geometriai rendszerben, és ezzel a komplex számoknak új, eddig ismeretlen mértani alkalmazása tárult fel. A pályázatban kitűzött kérdésre a 10. és 11. §-ban igyekszik választ adni. Alexits György szerint „a Responsio egymagában elég lenne ahhoz, hogy a Bolyai névnek helyet biztosítson a matematika történetében.” Ennek ellenére sajnálatos módon a Responsio-t még csak kritikára sem méltatták, így Bolyai életében nyomtatásban sem jelent meg. A pályázat eredményének kihirdetése után mindkét Bolyai visszakérte dolgozatát.

Ennek a szerencsés lépésnek köszönhető, hogy a Responsio kézirata nem veszett el, és azt Stäckel publikálta először 1914-ben.

James Hopwood **Jeans** (1877–1946) matematikus–fizikus–csillagászt is megelőzte: a nevét viselő számelméleti tétel több mint 40 évvel korábbi felfedezésével. A számelméletre, vagy ahogy Gauss nevezte, a „matematika királynőjére”, apja hívta fel János figyelmét. Jánost a számelmélet valósággal elbűvölte. (Olyannyira, hogy még bűvös négyzetet is szerkesztett! [9/113]) „A *számelméletben nem csak az egész számok, hanem az egész tan legfontosabb, leghasznosabb, leglényegesebb, legszebb, legérdekesebb, legkecsesebb feladatait találjuk*.” – vallotta [9/83]. Ezen belül is legtöbbet a prímszámokkal vesződött. „*Az egész számtan, sőt az egész tan mezején* – vallja – *alig van szebb és érdekesebb … mint a főszámok* [prímszámok] *oly mély homályban rejlő titka*.” Már gyermekkorában elgondolkodott azon, hogy végtelen sok prímszám létezik-e. A prímek egy csoportját pszeudoprímnek (vagy álprímeknek) nevezzük. Az $\boldsymbol{n}$ pozitív egész szám pszeudoprím, ha minden $\boldsymbol{a}$ egészre $a^{\mathbf{n}}$-a maradék nélkül osztható n-el. [Ezt a matematikusok így írják: $a^{\mathbf{n}} \equiv a(\mathrm{mod}\ \mathbf{n})$, és azt mondják, hogy ez egy kongruencia. Pl. $19 \equiv 7(\mathrm{mod}\ 3)$ azt jelenti, hogy 19-7 maradék nélkül osztható 3-al, vagy másként, 19:3 és 7:3 esetén a maradék mindkét esetben 1, azaz 19 és 7 ugyanabba a maradékosztályba tartozik. a=2 esetén n=341pszeudoprím, mert 2^{341}-2 osztható 341-el. A kis Fermat-tétel szerint minden prím egyben pszeudoprím is. Viszonylag kevés olyan pszeudoprím van, amely nem prím. Ahhoz, hogy meghatározzuk, prímszám-e egy egész szám, vagy összetett, hasznos lehet először megnézni, hogy pszeudoprím-e. A legtöbb összetett számra már ez megmutatja, hogy összetett. A legkisebb 2-höz viszonyított pszeudoprímet Bolyai János fedezte fel. Ez éppen az előző példában szereplő **341**=11·31 szám, amelyről kimutatta, hogy ha $2^{\mathbf{11}-1}$-1 osztható 31-el, és $2^{\mathbf{31}-1}$-1 osztható 11-el, akkor ezekből következik, hogy $2^{\mathbf{11}\cdot\mathbf{31}-1}$-1is osztható 11·31=341-el, amely szám pszeudoprím. Általánosan fogalmazva tehát azt mondhatjuk, hogy ha p és q prímszámok, a pedig egy sem p-vel, sem q-val nem osztható egész szám, akkor, ha 2^{p-1}-1 osztható q-val és 2^{q-1}-1 osztható p-vel, akkor ezekből következik, hogy $2^{\mathbf{p}\cdot\mathbf{q}-1}$-1is osztható p·q-val. Ez éppen a pszeudoprímekkel kapcsolatos *Jeans-tétel*. Szomorú érdekesség, hogy ez a szép Bolyai-tétel a matematikai irodalomban Jeans-tétel néven ismeretes. Ha Bolyai publikálta volna eredményét, azzal mindenképpen megelőzte volna James Hopwood Jeans 1898-as dolgozatát és akkor ezt a tételt ma valódi felfedezője, Bolyai János nevével tartaná számon a matematika története [7]. A pszeudoprímek egyébként a XX. század 70-es éveiben kerültek az érdeklődés középpontjába a titkosítások kapcsán.

Kiket szárnyalt túl Bolyai és mivel?

▪ Pierre de **Fermat** (1601–1665) jogász és híres műkedvelő matematikust, a róla elnevezett tétel egyszerű bizonyításával. „Fermat az ún. «descente infinite» vagy «végtelen leszállás» módszerével bizonyította be a tételt [9, 97. old.].” Ez bonyolultabb, mint Bolyai bizonyítása. Ezt a nevezetes tételt a matematika története Pierre FERMAT-nak tulajdonítja, bár néhány évvel előtte A. Girard (1595–1632) is megfogalmazta. Mivel Fermat felfedezését egy 1640. december 25-én kelt levelében közli barátjával, M. Mersenne-nel, a tételt szokták „Fermat karácsonyi tételének” is nevezni. Fermat sejtése a számelmélet egyik klasszikus tétele, amely szerint minden 4m + l (m ∈ N) alakú prímszám a tagok sorrendjétől eltekintve egyértelműen felírható *két* egész szám négyzetének összegeként. Emiatt nevezik „*két négyzetszám tétel*nek” is. Például **5** = 4·1+1 = $2^2 + 1^2$, **13** = 4·3+1 = $3^2 + 2^2$, **17** = 4·4+1=$4^2 + 1^2$, stb.]. A tételt Euler is bebizonyította, de nagyon bonyolultan, és hosszadalmasan (55 oldalon!).

▪ Leonhard **Euler** (1707–1783) matematikust: *Fermat karácsonyi tétel*ének egyszerű bizonyításával. A Teleki Tékában is fellelhető volt Eulernak az a műve, melyben ezt a tétel bizonyította. Az 55 oldalas bizonyítás közel kétszer olyan hosszú, mint az egész Appendix. Euler bizonyítását Bolyai Farkas is túl hosszúnak ítélte, ezért levélben kérte fiát, hogy próbálja rövidebben bebizonyítani ezt a matematikai igazságot. János Eulertől egyszerűbb bizonyítást adott a tételre, sőt mi több, apjához írott egyik levelében két oldalon(!) négy(!) bizonyítását írta le a tételnek. A negyedik bizonyítás 2 sorból(!) állt. Bolyai Jánosnak ez a bizonyítása minden bizonnyal a KÖNYV-be való. (Erdős Pál szerint „*Istennek van egy* KÖNYVe*, amelyben minden tétel és a legjobb bizonyítások benne vannak. Ha nem is hiszel Istenben, a Könyvben hinned kell! Talán az Isten maga a* KÖNYV. – hirdette. *Egy matematikus csak akkor lehet nyugodt, ha egy problémának nem csak egy bizonyítását, hanem a Könyvből származó bizonyítását találja meg*." Kiss Elemér professzor mutatott rá, hogy a fenti tétellel kapcsolatban még 2000-ben is jelent meg olyan matematikai közlemény, amelyet János már 160 évvel korábban kidolgozott [12].

Nem kizárt, hogy a fenti névsor még folytatódhat, hiszen maga Weszely Tibor, a neves Bolyai-kutató nyilatkozta, hogy „Bolyai Jánosnak különösen az *analízis* területén vannak még feldolgozatlan feljegyzései, de a matematika más ágához tartozó írásai is *»várnak a napfényre«*, ahogyan ő fogalmazott [5]."

Oláh-Gál Róbert Bolyai-kutató is hasonlóan vélekedik, amikor azt írja, hogy „még sok meglepetést hozhat a Bolyai-kéziratok megfejtése [15]".

Bolyai János mindenkit megelőzött:

- az *abszolút geometria* felfedezésével; Sem Gauss leveleiben, sem Lobacsevszkij dolgozataiban nincs szó az abszolút geometriáról, ezért joggal állítható, hogy az abszolút geometria felfedezése egyedül Bolyai János érdeme. Előtte sem, de vele egy időben sem gondolt senki annak megalkotására. Vekerdi László ide kívánkozó gondolatával: „Bolyai János nem a nemeuklideszi geometriát fedezte fel. Neki a nemeuklideszi geometria ingyen ajándékként adódott, miután fölfedezte, szó szerint megteremtette az abszolút geometriát, azt a Harmadikat, ahonnét a Másik kettő kibontotta a maga külön és önmagában megtámadhatatlan igazságát [21]". Tehát a Bolyai által abszolútnak nevezett geometria azokat a tételeket tartalmazza, melyek mind az euklideszi (Σ rendszer), mind a hiperbolikus (S rendszer) geometriában egyaránt érvényesek.
- a *fizika geometrizálása* gondolat megfogalmazásával
- annak belátásában, hogy *a kör négyszögesítése az euklideszi síkban lehetetlen*
- annak felismerésével, hogy a *fizikai gravitációs erőtér és a geometriai tér között belső összefüggésnek kell lennie*
- a *modellmódszer első alkalmazásával*, amikor az Appendix 21. §-ában kimutatta, hogy ha a paraszférán a paraciklust tekintjük egyenesnek, akkor a paraszférán az euklideszi geometria érvényes. Tehát a hiperbolikus térben modellt szerkesztett – paraszférát –, amelyen az euklideszi geometria érvényes. Ez a fontos tulajdonság nagy szerepet játszik Bolyai ellentmondás-mentességi vizsgálataiban. A modell létezése azt bizonyítja, hogy ha az S rendszer ellentmondástalan, akkor ellentmondástalan a Σ rendszer is. Ő azonban a modellmódszert arra használta, hogy az S-ben érvényes tételeket a Σ-ban érvényes tételekből vezesse le.
- abban, hogy kimondta: „*a nemeuklideszi geometria éppen úgy ellentmondásmentes, mint az euklideszi.*"

„Az igazság az, hogy Bolyai felfedezése két alapvető szempontból volt döntő. Egyrészt, hogy a geometriában megadta ezt a lehetőséget, másrészt a matematikai logikában először volt olyan, hogy egymásnak látszólag két ellentmondani tűnő tény is megvalósulhat. Tehát az euklideszi geometria is lehetséges, meg a hiperbolikus geometria is. … hogy nem csak egyféleképpen szabad gondolkodni, hanem többféleképpen is. Ebben világjelentőségű áttörést jelentett ez az új hiperbolikus geometria." – összegezte Bolyai hatását Böröczky Károly akadémikus [12].

„Bolyai másik nagy gondolata, hogy ha már van többféle geometria, akkor melyik az, amelyik megvalósul? Amíg csak egy van, addig ez nem kérdés. De ha már több van, akkor már kérdés, hogy a jó Isten ezek közül melyiket szerette? – teszi fel a kérdést Lovas István akadémikus [12].

Az Appendix 33. paragrafusa bizonyítja, hogy Bolyait ez a kérdés is komolyan foglalkoztatta. Itt ugyanis egy feladatot fogalmaz meg az általa felfedezett hiperbolikus geometria valóságot leíró k paraméterének meghatározására. Gábos Zoltán fizikaprofesszor mutatta ki, hogy ez a paraméter az Einstein-féle kozmológiai állandóval hozható kapcsolatba [14].

Ki képes arra, hogy a tudománytörténet eme óriásait akár 100 évvel is megelőzze, ha nem egy géniusz! Eötvös Loránd szavaival mindenképpen egyetértve el kell fogadni, hogy „csak az az igazi tudomány, amely világra szól; … ez valósult meg Bolyai alkotásával egyszer; ilyen teljes mértékben talán egyetlenegyszer." Szentágothai János szavai egyáltalán nem túlzóak, amikor azt írja, hogy *„A magyar nép géniusza a tudomány területén legmagasabb fokon Bolyai Jánosban öltött testet."* Bolyai János nagyságát Weszely Tibor Bolyai-kutató így jellemezte [13]:

- a mai napig a magyar nemzet legnagyobb matematikusa
- egy szerencsétlen életű ember, akiben nagyon érződik a magyar sors
- minden idők egyik legnagyobb matematikusa

Felvetődik a kérdés, hogy mi mindennel gazdagíthatta volna még a matematika tudományát ez a zseni, ha kedvező körülmények között folytathatta volna kutatásait és publikálhatta volna felfedezéseit [9]. Egy Pierre-Simon Laplace-nak tulajdonított mondás kifejezi Euler hatását a matematikára.

„Olvasd Eulert, olvasd Eulert, ő mindannyiunk mestere." Maga Gauss, a matematika fejedelme is úgy nyilatkozott, hogy „Euler műveinek tanulmányozása mindig a legjobb iskola lesz. Semmi sem helyettesítheti." Bolyai János nem csak a geometriában alkotott nagyot. „Ő egyetemes matematikai zseni volt, aki kora matematikájának minden olyan ágával foglalkozott, amelyekről tudomást szerzett [19]." A fentiekben nem is említett analízissel kapcsolatosan Domáldról 1844-ben tudatja apjával, hogy *„Az integrálszámításban is tömérdek új könnyű, tiszta tanom van…*[9, 164. o.]" Más, alkotóbb légkörben, kellő elismertség esetén a matematika sok területére kiterjedő érdeklődésével, párját ritkító tehetségével egy második Euler lehetett volna.

Köszönetnyilvánítás

A cikk szerzője köszönetet mond Dr. *Böröczky Károly* akadémikusnak, Dr. *Weszely Tibor*, és Dr. *Szabó Péter Gábor* Bolyai-kutatóknak a cikk előzetes átolvasásáért és értékes észrevételeikért.

IRODALOM

[1] Héjjas István: *Illúzió és valóság*. Aszklépiosz Kiadó, 1977, 61–62. o.
Wikipédia: *Gödel, Göde-tétel* címszavak
[2] http://tudasbazis.sulinet.hu/hu/termeszettudomanyok/fizika/eletrajzok/niels-bohr
[3] Ribár Béla: *Magyar származású tudósok*. Újvidék, 1996. Jugoszláviai Magyar Művelődési Társaság. 125 p. /A Jugoszláviai Magyar Művelődési Társaság kiskönyvtára Természettudomány és tudománytörténet./
[4] Toró Tibor: Bolyai János, a dinamikai geometria értelmezésének előfutára. *Fizikai Szemle*, (42. évf.) 1992/5. 187. o.
[5] A Bolyai-kép formálói – interjú Kiss Elemér és Weszely Tibor marosvásárhelyi kutatókkal.
[6] Ifj. Gazda István – Sain Márton: *Fizikatörténeti ABC*. Tankönyvkiadó, 1989, 28. o.
[7] T. Dénes Tamás: *Bolyai János valódi arca*. *Bolyai János halálának 150. évfordulóján*. 11. o.
[8] Kiss Előd-Gergely – Szucher Ervin: Digitalizálták Bolyai János életművét. *Krónika*, 2012. 12. 17., [web:] http://www.kronika.ro/erdelyi-hirek/digitalizaltak-bolyai-janos-eletmuvet
[9] Kiss Elemér: *Matematikai kincsek Bolyai János kéziratos hagyatékából*. 2. bőv. kiadás, Budapest, Typotex, 2005. [227–232. o.: Bolyai által használt műszavak és jelölések (118 db)]
[10] Weszely Tibor: *Bolyai János matematikai munkássága*. Kriterion Kiadó, Bukarest, 1981, 382. o.

[11] Oláh-Gál Róbert: Felébresztett tündérek a Teleki–Bolyai Könyvtárban. *Székelyföld*, 2002. október.
[12] *Bolyától a világhírig. Egy szellemóriás nehéz élete*. Életrajzi film, MTV, 2002, 43 perc. Forgatókönyv: Kremsier Edit, Riporter: Gál Jolán, Rendező: Szőnyi G. Sándor. A filmben megszólalnak: Ács Tibor, Benkő Samu, Böröczky Károly, Császár Ákos, Kiss Elemér, Prékopa András, Weszely Tibor.
[13] *Találkozás a végtelennel*. Életrajzi film, MTV, 2002, 54 perc. Rendező: Pataki Éva, Operatőr: Pap Ferenc. A filmben megszólalnak: Benkő Samu, Gábos Zoltán, Jenkovszky László, Jurij Sitenko, Kiss Elemér, Lovas István, Oláh-Gál Róbert, Toró Tibor, Weszely Tibor.
[14] Gábos Zoltán: A Bolyai–Lobacsevszkij-féle gravitációs törvény. *Fizikai Szemle*, (50. évf.) 2000/1. 13–15. o.
[15] Oláh-Gál Róbert: Bolyai János egyik leghosszabb fizika tárgyú kéziratáról. *Fizikai Szemle*, 2008/9. 302. o.
[16] *Bolyai János élete és műve (Bolyai János Emlékkönyv, születésének 150. évfordulójára)*. Tanulmánykötet, Szerk. Fodor Ernő, Bukarest, 1953, Állami Tudományos Könyvkiadó. (Interprinderea Poligrafică Kolozsvár). 448,[4] p., 15 t. (egy kihajtható). Szövegközti ábrákkal. Kiadói vászonkötésben.
[17] Neumann Mária – Salló Ervin – Toró Tibor: *A semmiből egy új világot teremtettem*. Facla Könyvkiadó, Temesvár, 1974.
[18] Loeopold Infeld: *Akit az istenek szeretnek*. Gondolat, 1976, 462. o.
[19] Kiss Elemér: Kétszáz éve született Bolyai János. *Középiskolai Matematikai és Fizikai Lapok*, 2002/december, 457. o.
[20] Fotók forrása: www.wikipedia.hu
[21] Holló Berta: Bolyai János élete és munkássága. 2003, Topolya, Vajdaság. Miskolci Egyetem, Matematikai Intézet, Matematikai Önképzőkör.
[22] Varga János: A Bernoulli-egyenlőtlenség egyszerű bizonyítása. *Matlap*, 2014/2, Kolozsvár.
[23] Bolyai emlékkönyv. EMT, 2002.
[24] Tóth Imre – Surányi László: *Bécstől Temesvárig: Bolyai János útja a nem-euklideszi forradalom felé*. Typotex, 2002.
[25] Seebauer Imre: *A térválasztás kompetenciájának fejlesztése a sakkjátékban*. Szolnoki Tudományos Közlemények XVI. Szolnok, 2012.
[26] Prékopa András: Bolyai János forradalma. 1–3. rész. *Természet Világa*, 2002. július–szeptember.
[27] Szemjon Grigorjevics Gingyikin / Simon Gindikin: *Történetek fizikusokról és matematikusokról*. 2. jav. kiadás, Typotex, 2004. (Gauss visszafogottsága ebben le van írva.)

JEGYZETEK

1 Márkos Ferenc festőművész alkotása. Az Amerikában élő művész a képet a marosvásárhelyi Kultúrpalota féldomborművе, az apja arcvonásait sokban megőrző Bolyai Dénes arcképe, és a rá nagyon hasonlító Klapka György honvédtábornok képmása alapján készítette, iskolatársának, Weszely Tibornak ötlete és felkérése alapján.

2 Ebben az évben bizonyította be Ábel, hogy a négynél magasabb fokú algebrai egyenletek gyökképlettel általában nem oldhatók meg.

3 Euklideszi geometria esetén a *kör négyzetesítése* lenne a matematikailag igazán precíz elnevezés.

4 A hiperbolikus geometria esetén viszont majdnem teljesen pontos az elnevezés, mert abban nincs is négyzet, csak négyszög, és bizonyos esetekben elvégezhető a kör „négyszögesítése", vagyis szerkeszthető egy adott kör területével egyenlő területű *négyzet*.

5 George Bruce Halsted: One Hundred Books Famous in Science.

6 Nagy adósságunk, hogy Bolyai Farkas ezen művét a mai napig nem fordították le magyarra.